บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

แผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่ งชาติฉบับที่ 12 (พ.ศ. 2560 -2564) เป็นแผนพัฒนาประเทศที่มุ่งเตรียมความพร้อมและวางรากฐานการเสริมสร้างศักยภาพของประชากรในทุกช่วงวัย โดยมุ่งเน้นการพัฒนาคนในทุกมิติและในทุกช่วงวัยให้เป็นทุนมนุษย์ที่มีศักยภาพสูงในการยกระดับประเทศไทยให้เป็นประเทศที่พัฒนาแล้ว มีความมั่นคง มั่งคั่ง ยั่งยืน ด้วยการพัฒนาตามปรัชญาของเศรษฐกิจพอเพียง โดยในยุทธศาสตร์การพัฒนาประเทศ ยุทธศาสตร์การวิจัยที่ 8 การพัฒนาวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิจัย และนวัตกรรม มีแนวทางการพัฒนาสภาวะแวดล้อมของการพัฒนาวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิจัย และนวัตกรรม ด้านบุคลากรวิจัย คือ เร่งการผลิตบุคลากรสายวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่มีคุณภาพและสอดคล้องกับความต้องการโดยเฉพาะในสาขา STEM วิทยาศาสตร์(Science : S) เทคโนโลยี (Technology : T) วิศวกรรมศาสตร์ (Engineering : E) และคณิตศาสตร์ (Mathematics : M) ด้วยการสร้างสิ่งจูงใจ สร้างแรงบนดาลใจ สนับสนุนการศึกษา ฯลฯ เพื่อเพิ่มจำนวนผู้สำเร็จการศึกษาในสายวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และพัฒนาระบบการเรียนการสอนที่เชื่อมโยงระหว่างวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ในสถานศึกษา รวมทั้งเร่งผลิตกำลังคนและครูวิทยาศาสตร์ที่มีคุณภาพ ทั้งนี้ มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรีเป็นสถาบันการศึกษาที่มีพันธกิจในการจัดการศึกษาเพื่อพัฒนาคนให้มีความงอกงามทางภูมิปัญญา แสวงหาความรู้อย่างต่อเนื่อง มีคุณธรรม จริยธรรม และเป็นนักวิชาชีพที่ดี จึงมุ่งเน้นผลิตบัณฑิตที่มีคุณภาพออกมาสู่สังคม โดยมีคณะครุศาสตร์ทำหน้าที่ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อ ผลิตครู และพัฒนาครูและบุคลากรทางการศึกษาให้มีคุณภาพระดับประเทศ จึงมี ความสอดคล้องกับแนวทางของแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติตามที่กล่าวมา

สมการเชิงฟังก์ชัน (functional equation) เป็นสาขาหนึ่งในคณิตศาสตร์ (วิชาที่สอนให้มนุษย์รู้จักการใช้เหตุผล คิดวิเคราะห์อย่างเป็นระบบ) ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ (2558, หน้า 5) ได้ให้คำนิยามความหมายของสมการเชิงฟังก์ชัน คือ สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า(หรือตัวแปร) เป็นฟังก์ชัน ทั้งนี้สมการเชิงฟังก์ชันที่เป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย คือ สมการเชิงฟังก์ชันโคชีที่อยู่ในรูปผลบวก เรา เรียกว่า สมการเชิงฟังก์ชันโคชีการบวก (The additive Cauchy functional equation)

บทนิยาม เราเรียกฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ว่า ฟังก์ชันการบวก (additive function) ก็ต่อเมื่อ

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1.1}$$

สำหรับทุก $x,y\in\mathbb{R}$

ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ (2558, คำนำ) กล่าวว่า ประวัติของสมการเชิงฟังก์ชันสามารถย้อนไปได้กว่าสองศตวรรษ ตั้งแต่ยุคสมัยของดาลองแบร์ แต่บทความวิจัยสมการเชิงฟังก์ชันมีการตีพิมพ์กันมากในระยะเวลาราวสองทศวรรษที่ผ่านมา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง บทความเกี่ยวกับปัญหาเสถียรภาพของสมการเชิงฟังก์ชัน ซึ่งได้กระตุ้นให้เกิดความสนใจศึกษาสมการเชิงฟังก์ชันกันมากขึ้นกว่าที่เคยเป็นมาในอดีต แม้แต่ในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ซึ่งเดิมนั้นมีโจทย์สมการเชิงฟังก์ชันอยู่ประปราย แต่นับจากปี ค.ศ. 2008 ถึงปัจจุบัน โจทย์สมการเชิงฟังก์ชันได้รับการคัดเลือกให้เป็นข้อสอบแข่งขันประจำทุกปี จึงสะท้อนให้เห็นถึงความสำคัญของสมการเชิงฟังก์ชันที่มีเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ เราต่างตระหนักดีว่า ความคิดสร้างสรรค์เป็นพลังสำคัญในการขับเคลื่อนผลงานทางคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาสมการเชิงฟังก์ชันไม่ได้อาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่ยังต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์เป็นอย่างมากในการแทนค่าอย่างเหมาะสม เพื่อให้บรรลุผลลัพธ์ที่ต้องการ สมการเชิงฟังก์ชันจึงกระตุ้นให้ผู้ศึกษาเกิดความคิดสร้างสรรค์ ซึ่งไม่เพียงเกิดประโยชน์ต่อสมการเชิงฟังก์ชันโดยตรง แต่ยังส่งเสริมให้มีรากฐานทางความคิดที่มั่นคงในการศึกษาสาขาอื่นๆทางคณิตศาสตร์ด้วย

งานวิจัยทางสมการเชิงฟังก์ชัน (function equation) นั้นมีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่สนใจศึกษา เริ่มแรกในปี 1968 Aczèl, J., Haruki, H., McKiernan, M.A. และ Sakovic, G.N. ได้หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+t,y+t)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)=4f(x,y) \quad (1.2)$$

โดยที่ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ และ x,y,t เป็นจำนวนจริง ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.2) อยู่ในรูปของฟังก์ชันใดๆ 4 ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติสลับที่การคูณและการบวก (arbitrary symmetric multi-additive functions of four variables)

ต่อมาในปี 1970 S. Haruki ได้ศึกษาสมการคลื่น (wave equation)

$$f(x+t,y)+f(x-t,y)=f(x,y+t)+f(x,y-t), \quad (1.3)$$

โดยที่ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ซึ่งผลเฉลยทั่วไป คือ $f(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x-y)+B(x,y)$ เมื่อ $\alpha,\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ และ $B:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ เป็น biadditive and skew-symmetric

ปี ค.ศ. 2001 Sahoo และ Székelyhidi ค้นพบผลเฉลยทั่วไปในรูปจำนวนเชิงซ้อน (the general complex-valued solution) ของสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวกับการกรองดิจิตอล

$$f(x+t,y+t)+f(x-t,y)+f(x,y-t)=f(x-t,y-t)+f(x,y+t)+f(x+t,y) \quad \text{(W1)}$$

สำหรับทุก $x,y,t,\in G$ และ $f:G\times G\to\mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

ผู้วิจัยมีความสนใจทำวิจัยเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวกับการกรองดิจิตอลและได้สร้างสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t) \quad \text{(M)}$$

จากงานวิจัยของ Sahoo และ Székelyhidi ทั้งนี้ยังต้องการหาสมการเชิงฟังก์ชันที่สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M) โดยใช้เทคนิคและวิธีการพิสูจน์ของ Haruki และ Nakagiri (2007) สำหรับทุก $x,y,t,s\in G$ และ $f:G\times G\to\mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

จากความเป็นมาและความสำคัญข้างต้น ผู้วิจัยเลือกศึกษาสมการเชิงฟังก์ชันดังกล่าวเพื่อคิดค้นทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ในศาสตร์คณิตศาสตร์ให้นักคณิตศาสตร์ นักฟิสิกส์ วิศวกรคอมพิวเตอร์หรือผู้ที่สนใจ สามารถนำทฤษฎีบทนี้ได้ประยุกต์ใช้ได้ในอนาคต

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยคือ การหาสมการเชิงฟังก์ชันที่สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t)$$

สำหรับทุก $x,y,t,s\in G$ และ $f:G\times G\to\mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

กรอบแนวคิดในการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ต้องการหาสมการเชิงฟังก์ชันที่สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชันต่อไปนี้ $f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t)$ สำหรับทุก $x,y,t,s\in G$ และ $f:G\times G\to\mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้เทคนิคและวิธีการพิสูจน์ของ Haruki และ Nakagiri ในปี 2007 (หรือ C. Hengkrawit และ K. Naenudorn, 2013) ทั้งนี้สามารถเขียนเป็นภาพกรอบแนวคิดได้ดังนี้

งานวิจัยของ Haruki และ Nakagiri (2007)
ศึกษาสมการเชิงฟังก์ชัน $f(x+t,y)+f(x-t,y)=f(x,y+t)+f(x,y-t)$

↓

งานวิจัยของ C. Hengkrawit และ K. Naenudorn (2013)
ศึกษาสมการเชิงฟังก์ชัน
$f(x+t,y+t)+f(x-t,y)+f(x,y-t)=f(x-t,y-t)+f(x+t,y)+f(x,y+t)$

↓

งานวิจัยของ K. Naenudorn ศึกษาสมการเชิงฟังก์ชัน
$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t)$

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. งานวิจัยนี้สามารถสร้างทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ในศาสตร์คณิตศาสตร์และยังส่งเสริมให้มีรากฐานทางความคิดที่มั่นคงในการศึกษาสาขาอื่นๆทางคณิตศาสตร์ด้วย
2. นักคณิตศาสตร์ นักฟิสิกส์ วิศวกรคอมพิวเตอร์หรือผู้ที่สนใจ สามารถนำทฤษฎีบทนี้ได้ประยุกต์ใช้ในศาสตร์ต่างๆได้ในอนาคต