บทที่ 2

ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง ข้อสังเกตหนึ่งของสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวกับการกรองดิจิตอล (**A Note on a Functional Equation Related to Digital filtering**) ผู้วิจัยได้ศึกษาถึงบทนิยามทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางในการวิจัยดังนี้

1. บทนิยามและทฤษฎีต่างๆ ทางคณิตศาสตร์
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนิยามและทฤษฎีต่างๆ ทางคณิตศาสตร์

Definition 1 (Kannappan, pp. 35) Let G be a group. G is called **2-divisible group** if and only if there is $h \in G$ such that

$$g = 2h$$

for all $g \in G$.

Definition 2 (Kannappan, pp. 2) A function A is said to be **additive** if

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

for all x, y in its domain.

Example 3 (Kannappan, pp. 2) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a function defined by $f(x)=cx$ for all $x\in\mathbb{R}$ and c is an arbitrary constant. Then f is additive, since

$$f(x+y)=c(x+y)=cx+cy=f(x)+f(y)$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

Definition 4 (Kannappan, pp. 221) A mapping $B:G\times G\to F$ (G a group and $F=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) is called biadditive if B if additive in each variable; that is, if $B(\bullet,y)$ and $B(x,\bullet)$ are additive in $(\bullet)$.

Definition 5 (Kannappan, pp. 17) Let $A_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. A_n is said to be symmetric if and only if $A_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=A_n(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\ldots,x_{\pi(n)})$ for every permutation $\{\pi(1),\pi(2),\ldots\pi(n)\}$ of $\{1,2,\ldots,n\}$ where n is a positive number.

Definition 6 (Haruki and Nakagiri, 2007) A skew-symmetric bi-additive function $A:G\times G\to\mathbb{C}$ that is

$$A(x,y)=-A(y,x),$$

$$A(x,y+z)=A(x,y)+A(x,z),$$

and

$$A(x+z,y)=A(x,y)+A(z,x),$$

for all $x,y,z\in G$.

Proposition 7 A skew-symmetric bi-additive function $A:G\times G\to\mathbb{C}$ that is

$$A(x,x)=0$$

for all $x\in G$.

Proof. Since A is a skew-symmetric bi-additive function, that is

$$A(x,y)=-A(y,x) \tag{2.1}$$

Replacing $y=x$ in (2.1), we get

$$A(x,y)=-A(x,x)\,,$$

$$2A(x,y)=0\,,$$

$$A(x,y)=0\,.$$

This is $A(x,y)=0$.

Definition 8 (Haruki and Nakagiri, 2007) Let $(G,+)$ be a 2-divisible abelian group and $\mathbb{C}$ the field of all complex numbers. It is convenient to introduce **translation (shift) operators** X^t and Y^t for $t\in G$ defined by

$$X^t f(x,y)=f(x+t,y) \text{ and } Y^t f(x,y)=f(x,y+t)$$

for all $x,y\in G$. In particular $1=X^0=Y^0$ denote the identity operators.

Proposition 9 Let G be a group and H an abelian group. Let $f:G\times G\to H$. If X^t and Y^t are translation (shift) operators, then $X^tY^t f(x,y)=Y^tX^t f(x,y)$ for $t\in G$.

Proof. We consider

$$X^tY^t f(x,y)=X^t f(x,y+t)=f(x+t,y+t)$$

and

$$Y^tX^t f(x,y)=Y^t f(x+t,y)=f(x+t,y+t)$$

Then,

$$X^tY^t f(x,y)=Y^tX^t f(x,y)\,.$$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปี ค.ศ. 1970 Haruki พิจารณาสมการคลื่น (The wave equation)

$$f(x+t,y)+f(x-t,y)=f(x,y+t)+f(x,y-t) \tag{2.2}$$

โดยที่ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ซึ่งผลเฉลยทั่วไป คือ $f(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x-y)+B(x,y)$ เมื่อ $\alpha,\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ และ $B:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ เป็น biadditive and skew-symmetric

ปี ค.ศ. 2001 Sahoo และ Székelyhidi ค้นพบผลเฉลยทั่วไปในรูปฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน (the general complex-valued solution) ของสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวกับการกรองดิจิตอล

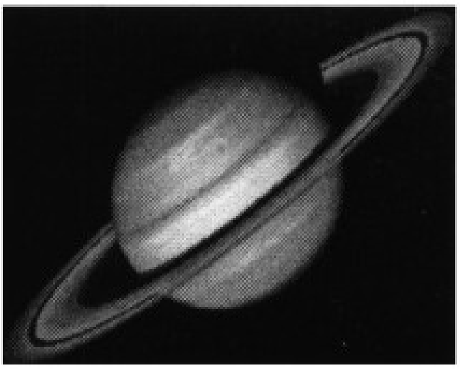
$$f(x+t,y+t)+f(x-t,y)+f(x,y-t)=f(x-t,y-t)+f(x,y+t)+f(x+t,y) \quad \text{(W1)}$$

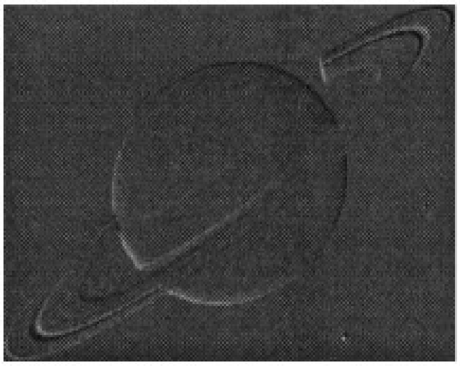
สำหรับทุก $x,y,t,\in G$ และ $f:G\times G\to\mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$f(x,y)=B(x,y)+\phi(x)+\psi(y)+\chi(x-y)$$

สำหรับทุก $x,y\in G$ โดยที่ $B:G\times G\to\mathbb{C}$ เป็น biaddtive และ $\phi,\psi,\chi:G\to\mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ

ทั้งพวกเขายังอธิบายเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวกับการกรอง (W1) ว่าเป็นสมการเชิงฟังก์ชันที่เมื่อนำไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์คอมพิวเตอร์แล้วจะสามารถทำให้เกิดผลลัพธ์ที่แตกต่างจากเดิม โดยที่พวกเขาอธิบายในเชิงรูปภาพ คือ ภาพด้านซ้ายเมื่อคือภาพต้นฉบับ เมื่อนำภาพดังกล่าวผ่านการกรองดิจิตอลโดยสมการเชิงฟังก์ชัน (W1) แล้วจะทำให้ได้ภาพทางขวามือ ซึ่งเป็นภาพนูนต่ำ





หมายเหตุ ในกระบวนการกรองดิจิตอล Sahoo และ Székelyhidi ไม่ได้เปิดเผยถึงการทดลองหรือการโปรแกรมที่ใช้สมการเชิงฟังก์ชันดังกล่าว

ปี ค.ศ. 2007 Haruki และ Nakagiri พิจารณา the pexider type generalization of the wave equation (2.2) ดังสมการต่อไปนี้

$$f_1(x+t,y)+f_2(x-t,y)=f_3(x,y+t)+f_4(x,y-t) \tag{2.3}$$

สำหรับทุก $x,y,t,\in G$ และ $f_1,f_2,f_3,f_4:G\times G\to\mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

Theorem If $f_1,f_2,f_3,f_4:G\times G\to\mathbb{C}$ satisfy (2.3) for all $x,y,t\in G,$ then there exist

(i) a skew-symmetric biadditive function $A:G\times G\to\mathbb{C},$

(ii) biadditive functions $B_1,B_2:G\times G\to\mathbb{C},$ and

(iii) arbitrary functions $\alpha,\beta,\phi_1,\phi_2,\psi_1,\psi_2,\chi_1,\chi_2:G\to\mathbb{C}$

such that

$$f_1(x,y)=A(x,y)+B_1(x+y,x-y)+\alpha(x+y)+\beta(x-y)+\phi_1(x+y)+\psi_1(x-y)+\chi_1(2y),$$

$$f_2(x,y)=A(x,y)-B_1(x+y,x-y)+\alpha(x+y)+\beta(x-y)-\phi_1(x+y)-\psi_1(x-y)-\chi_1(2y),$$

$$f_3(x,y)=A(x,y)+B_2(x+y,2x)+\alpha(x+y)+\beta(x-y)+\phi_2(x+y)+\psi_2(2x)+\chi_2(-x+y),$$

$$f_4(x,y)=A(x,y)-B_2(x+y,2x)+\alpha(x+y)+\beta(x-y)-\phi_2(x+y)-\psi_2(2x)-\chi_2(-x+y).$$

ทั้งนี้ Haruki และ Nakagiri ยังได้หาสมการที่สมนัย (equivalent) กับสมการที่ (2.2) คือ สมการเชิงฟังก์ชัน 2 สมการ ดังนี้

$$f(x+t,y+t)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)$$

$$=f(x,y+2t)+f(x,y-2t)+2f(x,y) \tag{2.4}$$

และ

$$f(x+t,y+t)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)$$
$$=f(x+2t,y)+f(x-2t,y)+2f(x,y) \qquad (2.5)$$

สำหรับทุก $x,y,t,\in G$ และ $f:G\times G\to\mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

ปี ค.ศ. 2013 จรินทร์ทิพย์ เฮงคราวิทย์ และ ขนิษฐา แน่นอุดร (C. Hengkrawit and K. Naenudorn, 2013) ได้หาสมการที่สมนัย (equivalent) กับสมการ (W1) โดยใช้เทคนิคของ Haruki และ Nakagiri ในปี 2007 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

Theorem Equations

$$f(x+t,y+t)+f(x-t,y)+f(x,y-t)=f(x-t,y-t)+f(x,y+t)+f(x+t,y), \quad \text{(W1)}$$

$$f(x+2t,y+t)+f(x,y+t)+f(x-2t,y)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y-t)$$
$$=f(x-2t,y-t)+f(x,y-t)+f(x+2t,y)+f(x-t,y+t)+f(x+t,y+t), \quad \text{(W2)}$$

and $f(x+t,y+2t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)+f(x+t,y)+f(x,y-2t)$
$$=f(x-t,y-2t)+f(x+t,y-t)+f(x+t,y+t)+f(x-t,y)+f(x,y+2t). \quad \text{(W3)}$$

for all $x,y,t\in G$ are equivalent to each other under the assumption $f:G\times G\to\mathbb{C}$.