

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงพื้นฐาน (Basic research) โดยใช้เทคนิคในงานวิจัยของ S. Haruki และ S. Nakagiri (2007) และงานวิจัยของ C. Hengkrawit และ K. Naenudorn (2013) เพื่อหาสมการที่สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s, y+t) + f(x-s, y) + f(x, y-t) = f(x-s, y-t) + f(x+s, y) + f(x, y+t) \quad (M)$$

ทั้งนี้สามารถเขียนเป็นทฤษฎีบทได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $f: G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ \mathbb{C} เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า f ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน (M) ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} & f(x+2s, y+2t) + f(x-2s, y-t) + f(x-s, y-2t) + f(x, y+t) + f(x+s, y) \\ &= f(x-2s, y-2t) + f(x+2s, y+t) + f(x+s, y+2t) + f(x, y-t) + f(x-s, y) \end{aligned} \quad (M1)$$

และ

$$\begin{aligned} & f(x+2s, y) + f(x, y+2t) + f(x-s, y) + f(x, y-t) + f(x-2s, y+t) + f(x+s, y-2t) \\ &= f(x-2s, y) + f(x, y-2t) + f(x+s, y) + f(x, y+t) + f(x+2s, y-t) + f(x-s, y+2t) \end{aligned} \quad (M2)$$

สำหรับทุก $x, y, t, s \in G$

พิสูจน์ มีขั้นตอนดังนี้

1. แสดงว่าสมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M1)
2. แสดงว่าสมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M2)

เริ่มต้นการพิสูจน์จากขั้นตอนที่ 1. แสดงว่าสมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M1) จากสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s, y+t) + f(x-s, y) + f(x, y-t) = f(x-s, y-t) + f(x+s, y) + f(x, y+t) \quad (M)$$

สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูป operator form ได้ดังนี้

$$\left[X^s Y^t + X^{-s} + Y^{-t} \right] f = \left[X^{-s} Y^{-t} + X^s + Y^t \right] f \quad (1)$$

คูณสมการ (1) ด้วย $X^s Y^t$ จะได้ว่า

$$\left[X^{2s} Y^{2t} + Y^t + X^s \right] f = \left[1 + X^{2s} Y^t + X^s Y^{2t} \right] f \quad (2)$$

คูณสมการ (1) ด้วย $X^{-s} Y^{-t}$ จะได้ว่า

$$\left[1 + X^{-2s} Y^{-t} + X^{-s} Y^{-2t} \right] f = \left[X^{-2s} Y^{-2t} + Y^{-t} + X^{-s} \right] f \quad (3)$$

นำสมการ (2) + (3) จะได้ว่า

$$\left[X^{2s} Y^{2t} + X^{-2s} Y^{-t} + X^{-s} Y^{-2t} + Y^t + X^s \right] f = \left[X^{-2s} Y^{-2t} + X^{2s} Y^t + X^s Y^{2t} + Y^{-t} + X^{-s} \right] f \quad (4)$$

จากสมการที่ (4) สามารถเขียนสมการเชิงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & f(x+2s, y+2t) + f(x-2s, y-t) + f(x-s, y-2t) + f(x, y+t) + f(x+s, y) \\ &= f(x-2s, y-2t) + f(x+2s, y+t) + f(x+s, y+2t) + f(x, y-t) + f(x-s, y) \end{aligned}$$

ซึ่งคือสมการเชิงฟังก์ชัน (M1) นั่นเอง ต่อไปจะแสดงว่า สมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมัยกับสมการเชิงฟังก์ชัน (M2) นั่นคือ

คูณสมการ (1) ด้วย $X^{-s} Y^t$ จะได้ว่า

$$\left[Y^{2t} + X^{-2s} Y^t + X^{-s} \right] f = \left[X^{-2s} + Y^t + X^{-s} Y^{2t} \right] f \quad (5)$$

คูณสมการ (1) ด้วย $X^s Y^{-t}$ จะได้ว่า

$$\left[X^{2s} + Y^{-t} + X^s Y^{-2t} \right] f = \left[Y^{-2t} + X^{2s} Y^{-t} + X^s \right] f \quad (6)$$

นำสมการ (5) + (6) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & [X^{2s} + Y^{2t} + X^{-s} + Y^{-t} + X^{-2s}Y^t + X^sY^{-2t}]f \\ & = [X^{-2s} + Y^{-2t} + X^s + Y^t + X^{2s}Y^{-t} + X^{-s}Y^{2t}]f \end{aligned} \quad (7)$$

จากสมการที่ (7) สามารถเขียนสมการเชิงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & f(x+2s, y) + f(x, y+2t) + f(x-s, y) + f(x, y-t) + f(x-2s, y+t) + f(x+s, y-2t) \\ & = f(x-2s, y) + f(x, y-2t) + f(x+s, y) + f(x, y+t) + f(x+2s, y-t) + f(x-s, y+2t) \end{aligned}$$

ซึ่งเราจะได้สมการเชิงฟังก์ชัน (M2) นั้นเอง ลำดับต่อไปเราจะแสดงว่า สมการเชิงฟังก์ชัน (M1)

สมนัยกับสมการเชิงฟังก์ชัน (M) เมื่อเขียนในรูป operator form จะได้สมการเชิงฟังก์ชัน (4)

จากนั้นยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการพบว่า

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & X^{4s}Y^{4t} + 2Y^t + 2X^s + 2X^{2s}Y^{3t} + 2X^{3s}Y^{2t} + X^{-4s}Y^{-2t} + 2X^{-3s}Y^{-3t} + X^{-2s}Y^{-4t} \\ & + X^{-2s} + 2X^{-s}Y^{-t} + Y^{-2t} \end{aligned} \right] f \\ & = \left[\begin{aligned} & X^{-4s}Y^{-4t} + 2Y^{-t} + 2X^{-s} + 2X^{-2s}Y^{-3t} + 2X^{-3s}Y^{-2t} + X^{4s}Y^{2t} + 2X^{3s}Y^{3t} + X^{2s}Y^{4t} \\ & + X^{2s} + 2X^sY^t + Y^{2t} \end{aligned} \right] f \end{aligned} \quad (8)$$

แทนค่า t ด้วย $2t$ และ s ด้วย $2s$ ในสมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} & [X^{4s}Y^{4t} + X^{-4s}Y^{-2t} + X^{-2s}Y^{-4t} + Y^{2t} + X^{2s}]f \\ & = [X^{-4s}Y^{-4t} + X^{4s}Y^{2t} + X^{2s}Y^{4t} + Y^{-2t} + X^{-2s}]f \end{aligned} \quad (9)$$

นำสมการ (8) - (9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & [2Y^t + 2X^s + 2X^{2s}Y^{3t} + 2X^{3s}Y^{2t} + 2X^{-3s}Y^{-3t} + 2X^{-s}Y^{-t} + 2X^{-2s} + 2Y^{-2t}]f \\ & = [2Y^{-t} + 2X^{-s} + 2X^{-2s}Y^{-3t} + 2X^{-3s}Y^{-2t} + 2X^{3s}Y^{3t} + 2X^sY^t + 2X^{2s} + 2Y^{2t}]f \end{aligned} \quad (10)$$

คุณสมบัติ (4) ด้วย $X^s Y^t$ จะได้

$$\left[X^{3s} Y^{3t} + X^{-s} + Y^{-t} + X^s Y^{2t} + X^{2s} Y^t \right] f = \left[X^{-s} Y^{-t} + X^{3s} Y^{2t} + X^{2s} Y^{3t} + X^s + Y^t \right] f \quad (11)$$

คุณสมบัติ (4) ด้วย $X^{-s} Y^{-t}$ จะได้

$$\begin{aligned} & \left[X^s Y^t + X^{-3s} Y^{-2t} + X^{-2s} Y^{-3t} + X^{-s} + Y^{-t} \right] f \\ &= \left[X^{-3s} Y^{-3t} + X^s + Y^t + X^{-s} Y^{-2t} + X^{-2s} Y^{-t} \right] f \end{aligned} \quad (12)$$

นำสมการ (11) + (12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[X^{3s} Y^{3t} + X^s Y^{2t} + X^{2s} Y^t + X^s Y^t + X^{-3s} Y^{-2t} + X^{-2s} Y^{-3t} + 2X^{-s} + 2Y^{-t} \right] f \\ &= \left[X^{-3s} Y^{-3t} + X^{-s} Y^{-2t} + X^{-2s} Y^{-t} + X^{-s} Y^{-t} + X^{3s} Y^{2t} + X^{2s} Y^{3t} + 2X^s + 2Y^t \right] f \end{aligned} \quad (13)$$

คุณสมบัติ (13) ด้วย 2 จะได้

$$\begin{aligned} & \left[2X^{3s} Y^{3t} + 2X^s Y^{2t} + 2X^{2s} Y^t + 2X^s Y^t + 2X^{-3s} Y^{-2t} + 2X^{-2s} Y^{-3t} + 4X^{-s} + 4Y^{-t} \right] f \\ &= \left[2X^{-3s} Y^{-3t} + 2X^{-s} Y^{-2t} + 2X^{-2s} Y^{-t} + 2X^{-s} Y^{-t} + 2X^{3s} Y^{2t} + 2X^{2s} Y^{3t} + 4X^s + 4Y^t \right] f \end{aligned} \quad (14)$$

นำสมการ (14) + (10) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[2X^s Y^{2t} + 2X^{2s} Y^t + 2X^{-2s} + 2Y^{-2t} + 2X^{-s} + 2Y^{-t} \right] f \\ &= \left[2X^{-s} Y^{-2t} + 2X^{-2s} Y^{-t} + 2X^{2s} + 2Y^{2t} + 2X^s + 2Y^t \right] f \end{aligned} \quad (15)$$

คุณสมบัติ (4) ด้วย 2 จะได้

$$\begin{aligned} & \left[2X^{2s} Y^{2t} + 2X^{-2s} Y^{-t} + 2X^{-s} Y^{-2t} + 2Y^t + 2X^s \right] f \\ &= \left[2X^{-2s} Y^{-2t} + 2X^{2s} Y^t + 2X^s Y^{2t} + 2Y^{-t} + 2X^{-s} \right] f \end{aligned} \quad (16)$$

นำสมการ (15) + (16) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[2X^s Y^{2t} + 2X^{2s} Y^t + 2X^{-2s} + 2Y^{-2t} + 2X^{2s} Y^{2t} + 2X^{-2s} Y^{-t} + 2X^{-s} Y^{-2t} \right] f \\ &= \left[2X^{-s} Y^{-2t} + 2X^{-2s} Y^{-t} + 2X^{2s} + 2Y^{2t} + 2X^{-2s} Y^{-2t} + 2X^{2s} Y^t + 2X^s Y^{2t} \right] f \end{aligned} \quad (17)$$

คุณสมบัติสมการ (17) ด้วย $X^s Y^t$ จะได้

$$\left[2X^{-s}Y^t + 2X^sY^{-t} + 2X^{3s}Y^{3t} \right] f = \left[2X^{3s}Y^t + 2X^sY^{3t} + 2X^{-s}Y^{-t} \right] f \quad (18)$$

คุณสมบัติสมการ (17) ด้วย $X^{-s}Y^{-t}$ จะได้

$$\left[2X^{-3s}Y^{-t} + 2X^{-s}Y^{-3t} + 2X^sY^t \right] f = \left[2X^sY^{-t} + 2X^{-s}Y^t + 2X^{-3s}Y^{-3t} \right] f \quad (19)$$

นำสมการ (18) + (19) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[2X^{3s}Y^{3t} + 2X^{-3s}Y^{-t} + 2X^{-s}Y^{-3t} + 2X^sY^t \right] f \\ & = \left[2X^{-3s}Y^{-3t} + 2X^{3s}Y^t + 2X^sY^{3t} + 2X^{-s}Y^{-t} \right] f \end{aligned} \quad (20)$$

คุณสมบัติสมการ (20) ด้วย $X^s Y^t$ จะได้

$$\left[2X^{4s}Y^{4t} + 2X^{-2s} + 2Y^{-2t} + 2X^{2s}Y^{2t} \right] f = \left[2X^{-2s}Y^{-2t} + 2X^{4s}Y^{2t} + 2X^{2s}Y^{4t} + 2 \right] f \quad (21)$$

คุณสมบัติสมการ (20) ด้วย $X^{-s}Y^{-t}$ จะได้

$$\left[2X^{2s}Y^{2t} + 2X^{-4s}Y^{-2t} + 2X^{-2s}Y^{-4t} + 2 \right] f = \left[2X^{-4s}Y^{-4t} + 2X^{2s} + 2Y^{2t} + 2X^{-2s}Y^{-2t} \right] f \quad (22)$$

นำสมการ (21) + (22) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[2X^{4s}Y^{4t} + 2X^{-2s} + 2Y^{-2t} + 4X^{2s}Y^{2t} + 2X^{-4s}Y^{-2t} + 2X^{-2s}Y^{-4t} \right] f \\ & = \left[2X^{-4s}Y^{-4t} + 2X^{2s} + 2Y^{2t} + 4X^{-2s}Y^{-2t} + 2X^{4s}Y^{2t} + 2X^{2s}Y^{4t} \right] f \end{aligned} \quad (23)$$

คุณสมบัติสมการ (9) ด้วย 2 จะได้

$$\begin{aligned} & \left[2X^{4s}Y^{4t} + 2X^{-4s}Y^{-2t} + 2X^{-2s}Y^{-4t} + 2Y^{2t} + 2X^{2s} \right] f \\ & = \left[2X^{-4s}Y^{-4t} + 2X^{4s}Y^{2t} + 2X^{2s}Y^{4t} + 2Y^{-2t} + 2X^{-2s} \right] f \end{aligned} \quad (24)$$

นำสมการ (23) - (24) จะได้ว่า

$$\left[4X^{2s}Y^{2t} + 4X^{-2s} + 4Y^{-2t} \right] f = \left[4X^{-2s}Y^{-2t} + 4X^{2s} + 4Y^{2t} \right] f \quad (25)$$

นำ $\frac{1}{4}$ คูณสมการ (25) จะได้ว่า

$$\left[X^{2s}Y^{2t} + X^{-2s} + Y^{-2t} \right] f = \left[X^{-2s}Y^{-2t} + X^{2s} + Y^{2t} \right] f \quad (26)$$

แทนค่า $2t$ ด้วย t และ $2s$ ด้วย s ในสมการ (26) จะได้

$$\left[X^sY^t + X^{-s} + Y^{-t} \right] f = \left[X^{-s}Y^{-t} + X^s + Y^t \right] f \quad (27)$$

จากสมการ (27) สามารถเขียนเป็นสมการเชิงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f(x+s, y+t) + f(x-s, y) + f(x, y-t) = f(x-s, y-t) + f(x+s, y) + f(x, y+t)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงฟังก์ชัน (M) ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าสมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมมูล (equivalent)

กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M1)

ขั้นตอนที่ 2. ผู้วิจัยจะแสดงว่าสมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมมูล (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M2) ซึ่งเราจะเขียนในรูป operator form ได้ในรูปสมการ (7) จากนั้นยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ (7)

$$\begin{aligned} & \left[X^{4s} + 2X^{2s}Y^{2t} + 4X^s + 2X^{2s}Y^{-t} + 4Y^t + 2X^{3s}Y^{-2t} + Y^{4t} + 2X^{-s}Y^{2t} + 2X^{-2s}Y^{3t} \right. \\ & \left. + 3X^{-2s} + 4X^{-s}Y^{-t} + 2X^{-3s}Y^t + 2X^sY^{-3t} + 3Y^{-2t} + X^{-4s}Y^{2t} + X^{2s}Y^{-4t} \right] f \\ & = \left[X^{-4s} + 2X^{-2s}Y^{-2t} + 4X^{-s} + 2X^{-2s}Y^t + 4Y^{-t} + 2X^{-3s}Y^{2t} + Y^{-4t} + 2X^sY^{-2t} \right. \\ & \left. + 2X^{2s}Y^{-3t} + 3X^{2s} + 4X^sY^t + 2X^{3s}Y^{-t} + 2X^{-s}Y^{3t} + 3Y^{2t} + X^{4s}Y^{-2t} + X^{-2s}Y^{4t} \right] f \end{aligned} \quad (28)$$

แทนค่า t ด้วย $2t$ และ s ด้วย $2s$ ในสมการ (7) จะได้

$$\begin{aligned} & \left[X^{4s} + Y^{4t} + X^{-2s} + Y^{-2t} + X^{-4s}Y^{2t} + X^{2s}Y^{-4t} \right] f \\ & = \left[X^{-4s} + Y^{-4t} + X^{2s} + Y^{2t} + X^{4s}Y^{-2t} + X^{-2s}Y^{4t} \right] f \end{aligned} \quad (29)$$

นำสมการ (28) - (29) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & 2X^{2s}Y^{2t} + 2X^{2s}Y^{-t} + 2X^{3s}Y^{-2t} + 2X^{-s}Y^{2t} + 2X^{-2s}Y^{3t} + 2X^{-3s}Y^t \\ & + 2X^sY^{-3t} + 2X^{-2s} + 2Y^{-2t} + 4X^s + 4Y^t + 4X^{-s}Y^{-t} \end{aligned} \right] f \\ & = \left[\begin{aligned} & 2X^{-2s}Y^{-2t} + 2X^{-2s}Y^t + 2X^{-3s}Y^{2t} + 2X^sY^{-2t} + 2X^{2s}Y^{-3t} + 2X^{3s}Y^{-t} \\ & + 2X^{-s}Y^{3t} + 2X^{2s} + 2Y^{2t} + 4X^{-s} + 4Y^{-t} + 4X^sY^t \end{aligned} \right] f \end{aligned} \quad (30)$$

นำ $\frac{1}{2}$ คูณสมการ (30) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & X^{2s}Y^{2t} + X^{2s}Y^{-t} + X^{3s}Y^{-2t} + X^{-s}Y^{2t} + X^{-2s}Y^{3t} + X^{-3s}Y^t \\ & + X^sY^{-3t} + X^{-2s} + Y^{-2t} + 2X^s + 2Y^t + 2X^{-s}Y^{-t} \end{aligned} \right] f \\ & = \left[\begin{aligned} & X^{-2s}Y^{-2t} + X^{-2s}Y^t + X^{-3s}Y^{2t} + X^sY^{-2t} + X^{2s}Y^{-3t} + X^{3s}Y^{-t} \\ & + X^{-s}Y^{3t} + X^{2s} + Y^{2t} + 2X^{-s} + 2Y^{-t} + 2X^sY^t \end{aligned} \right] f \end{aligned} \quad (31)$$

นำสมการ (31) + (7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & X^{2s}Y^{2t} + X^{3s}Y^{-2t} + X^{-2s}Y^{3t} + X^{-3s}Y^t + X^sY^{-3t} + X^s + Y^t + 2X^{-s}Y^{-t} \end{aligned} \right] f \\ & = \left[\begin{aligned} & X^{-2s}Y^{-2t} + X^{-3s}Y^{2t} + X^{2s}Y^{-3t} + X^{3s}Y^{-t} + X^{-s}Y^{3t} + X^{-s} + Y^{-t} + 2X^sY^t \end{aligned} \right] f \end{aligned} \quad (32)$$

คูณสมการ (7) ด้วย $X^{-s}Y^t$ จะได้

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & X^sY^t + X^{-s}Y^{3t} + X^{-2s}Y^t + X^{-s} + X^{-3s}Y^{2t} + Y^{-t} \end{aligned} \right] f \\ & = \left[\begin{aligned} & X^{-3s}Y^t + X^{-s}Y^{-t} + Y^t + X^{-s}Y^{2t} + X^s + X^{-2s}Y^{3t} \end{aligned} \right] f \end{aligned} \quad (33)$$

คูณสมการ (7) ด้วย X^sY^{-t} จะได้

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & X^{3s}Y^{-t} + X^sY^t + Y^{-t} + X^sY^{-2t} + X^{-s} + X^{2s}Y^{-3t} \end{aligned} \right] f \\ & = \left[\begin{aligned} & X^{-s}Y^{-t} + X^sY^{-3t} + X^{2s}Y^{-t} + X^s + X^{3s}Y^{-2t} + Y^t \end{aligned} \right] f \end{aligned} \quad (34)$$

นำสมการ (33) + (34) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & 2X^sY^t + 2Y^{-t} + 2X^{-s} + X^{-s}Y^{3t} + X^{-2s}Y^t + X^{-3s}Y^{2t} + X^{3s}Y^{-t} + X^sY^{-2t} + X^{2s}Y^{-3t} \end{aligned} \right] f \\ & = \left[\begin{aligned} & 2X^{-s}Y^{-t} + 2Y^t + 2X^s + X^sY^{-3t} + X^{2s}Y^{-t} + X^{3s}Y^{-2t} + X^{-3s}Y^t + X^{-s}Y^{2t} + X^{-2s}Y^{3t} \end{aligned} \right] f \end{aligned} \quad (35)$$

นำสมการ (32) + (35) จะได้ว่า

$$\left[X^{2s}Y^{2t} + X^{-2s}Y^t + X^sY^{-2t} + X^{-s} + Y^{-t} \right] f = \left[X^{-2s}Y^{-2t} + X^{2s}Y^{-t} + X^{-s}Y^{2t} + X^s + Y^t \right] f \quad (36)$$

นำสมการ (7) + (36) จะได้ว่า

$$\left[X^{2s}Y^{2t} + X^{-2s} + Y^{-2t} \right] f = \left[X^{-2s}Y^{-2t} + X^{2s} + Y^{2t} \right] f \quad (37)$$

แทนค่า $2t$ ด้วย t และ $2s$ ด้วย s ในสมการ (37) จะได้

$$\left[X^sY^t + X^{-s} + Y^{-t} \right] f = \left[X^{-s}Y^{-t} + X^s + Y^t \right] f \quad (27)$$

จากสมการ (27) สามารถเขียนเป็นสมการเชิงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f(x+s, y+t) + f(x-s, y) + f(x, y-t) = f(x-s, y-t) + f(x+s, y) + f(x, y+t)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงฟังก์ชัน (M) ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าสมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมมูล (equivalent)

กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M2) □