บทที่ 4

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ข้อสังเกตหนึ่งของสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวกับการกรองดิจิตอล (**A Note on a Functional Equation Related to Digital filtering**) เป็นการวิจัยพื้นฐาน โดยใช้เทคนิคการพิสูจน์ในงานวิจัยของ S. Haruki และ S. Nakagiri (2007)

จากบทที่ 3 เป็นการพิสูจน์เพื่อหาสมการที่สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M) ทั้งนี้สามารถเขียนสรุปขั้นตอนการพิสูจน์ได้ 2 ขั้นตอนดังนี้

1. แสดงว่าสมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M1)

การพิสูจน์

(ขาไป ($\rightarrow$)) จากสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t) \quad \text{(M)}$$

ใช้วิธีการแก้สมการเชิงฟังก์ชันและเทคนิคของ S. Haruki และ S. Nakagiri (2007) ทำให้เกิดสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+2s,y+2t)+f(x-2s,y-t)+f(x-s,y-2t)+f(x,y+t)+f(x+s,y)$$
$$=f(x-2s,y-2t)+f(x+2s,y+t)+f(x+s,y+2t)+f(x,y-t)+f(x-s,y) \qquad \text{(M1)}$$

(ขากลับ ($\leftarrow$)) จากสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+2s,y+2t)+f(x-2s,y-t)+f(x-s,y-2t)+f(x,y+t)+f(x+s,y)$$
$$=f(x-2s,y-2t)+f(x+2s,y+t)+f(x+s,y+2t)+f(x,y-t)+f(x-s,y) \qquad \text{(M1)}$$

ใช้วิธีการแก้สมการเชิงฟังก์ชันและเทคนิคของ S. Haruki และ S. Nakagiri (2007) ทำให้ได้สมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t) \text{ (M)}$$

จากการพิสูจน์สามารถสรุปได้ว่า

สมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M1)

2. แสดงว่าสมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M2)

การพิสูจน์

(ขาไป ($\rightarrow$)) จากสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t) \text{ (M)}$$

ใช้วิธีการแก้สมการเชิงฟังก์ชันและเทคนิคของ S. Haruki และ S. Nakagiri (2007) ทำให้เกิดสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+2s,y)+f(x,y+2t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)+f(x-2s,y+t)+f(x+s,y-2t)$$
$$=f(x-2s,y)+f(x,y-2t)+f(x+s,y)+f(x,y+t)+f(x+2s,y-t)+f(x-s,y+2t) \quad \text{(M2)}$$

(ขากลับ ($\leftarrow$)) จากสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+2s,y)+f(x,y+2t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)+f(x-2s,y+t)+f(x+s,y-2t)$$
$$=f(x-2s,y)+f(x,y-2t)+f(x+s,y)+f(x,y+t)+f(x+2s,y-t)+f(x-s,y+2t) \quad \text{(M2)}$$

ใช้วิธีการแก้สมการเชิงฟังก์ชันและเทคนิคของ S. Haruki และ S. Nakagiri (2007) ทำให้ได้สมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t) \text{ (M)}$$

จากการพิสูจน์สามารถสรุปได้ว่า

สมการเชิงฟังก์ชัน (M) สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน (M2)

จากขั้นตอนสรุปการพิสูจน์ดังกล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยสามารถสร้างทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $f: G\times G \to \mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า f ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t) \quad \text{(M)}$$

ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+2s,y+2t)+f(x-2s,y-t)+f(x-s,y-2t)+f(x,y+t)+f(x+s,y)$$
$$=f(x-2s,y-2t)+f(x+2s,y+t)+f(x+s,y+2t)+f(x,y-t)+f(x-s,y) \quad \text{(M1)}$$

และ

$$f(x+2s,y)+f(x,y+2t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)+f(x-2s,y+t)+f(x+s,y-2t)$$
$$=f(x-2s,y)+f(x,y-2t)+f(x+s,y)+f(x,y+t)+f(x+2s,y-t)+f(x-s,y+2t)$$
$$\text{(M2)}$$

สำหรับทุก $x,y,t,s\in G$