บทที่ 5

การอภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

การอภิปรายผล

จากการวิจัยเรื่อง ข้อสังเกตหนึ่งของสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวกับการกรองดิจิตอล (A Note on a Functional Equation Related to Digital filtering) ได้มีการวิเคราะห์การพิสูจน์ในส่วนต่างๆ ตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัย โดยผู้วิจัยสามารถสรุปผลการวิจัยได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $f: G\times G \to \mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า f ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s,y+t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)=f(x-s,y-t)+f(x+s,y)+f(x,y+t) \qquad \text{(M)}$$

ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\begin{aligned}&f(x+2s,y+2t)+f(x-2s,y-t)+f(x-s,y-2t)+f(x,y+t)+f(x+s,y)\\&=f(x-2s,y-2t)+f(x+2s,y+t)+f(x+s,y+2t)+f(x,y-t)+f(x-s,y) \qquad \text{(M1)}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}&f(x+2s,y)+f(x,y+2t)+f(x-s,y)+f(x,y-t)+f(x-2s,y+t)+f(x+s,y-2t)\\&=f(x-2s,y)+f(x,y-2t)+f(x+s,y)+f(x,y+t)+f(x+2s,y-t)+f(x-s,y+2t) \qquad \text{(M2)}\end{aligned}$$

สำหรับทุก $x,y,t,s\in G$

ซึ่งผลการวิจัยดังกล่าวสอดคล้องกับงานวิจัยของ Haruki และ Nakagiri (2007) ที่ได้หาสมการที่สมนัย (equivalent) กับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+t,y)+f(x-t,y)=f(x,y+t)+f(x,y-t) \tag{2.2}$$

คือ สมการเชิงฟังก์ชัน 2 สมการ ดังนี้

$$f(x+t,y+t)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)$$
$$=f(x,y+2t)+f(x,y-2t)+2f(x,y) \tag{2.4}$$

และ

$$f(x+t,y+t)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)$$
$$=f(x+2t,y)+f(x-2t,y)+2f(x,y) \tag{2.5}$$

สำหรับทุก $x,y,t,\in G$ และ $f:G\times G\to\mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

ทั้งนี้ผลการวิจัยยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ C. Hengkrawit และ K. Naenudorn (2013) ที่ได้หาสมการที่สมนัย (equivalent) กับสมการ (W1) โดยใช้เทคนิคของ Haruki และ Nakagiri ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

Theorem Equations

$$f(x+t,y+t)+f(x-t,y)+f(x,y-t)=f(x-t,y-t)+f(x,y+t)+f(x+t,y), \quad \text{(W1)}$$

$$f(x+2t,y+t)+f(x,y+t)+f(x-2t,y)+f(x+t,y-t)+f(x-t,y-t)$$
$$=f(x-2t,y-t)+f(x,y-t)+f(x+2t,y)+f(x-t,y+t)+f(x+t,y+t), \quad \text{(W2)}$$

and $f(x+t,y+2t)+f(x-t,y+t)+f(x-t,y-t)+f(x+t,y)+f(x,y-2t)$

$$=f(x-t,y-2t)+f(x+t,y-t)+f(x+t,y+t)+f(x-t,y)+f(x,y+2t). \quad \text{(W3)}$$

for all $x,y,t\in G$ are equivalent to each other under the assumption $f:G\times G\to\mathbb{C}$.

สุดท้ายนี้ ปัญหาอุปสรรคในการทำวิจัย คือ การคิดค้นสมการเชิงฟังก์ชันที่สมนัยกับสมการเชิงฟังก์ชัน (M) ต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์เป็นอย่างมากในการแทนค่าอย่างเหมาะสม เพื่อให้ได้สมการเชิงฟังก์ชันที่ต้องการตามเทคนิคข้างต้น

สรุปผล

การวิจัยเรื่อง ข้อสังเกตหนึ่งของสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวกับการกรองดิจิตอล (**A Note on a Functional Equation Related to Digital filtering**) เป็นการวิจัยพื้นฐาน โดยใช้เทคนิคการพิสูจน์ในงานวิจัยของ S. Haruki และ S. Nakagiri (2007) ผู้วิจัยสามารถสร้างทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $f: G \times G \to \mathbb{C}$ โดยที่ G เป็น 2-divisible abelian group และ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า f ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+s, y+t)+f(x-s, y)+f(x, y-t)=f(x-s, y-t)+f(x+s, y)+f(x, y+t) \quad \text{(M)}$$

ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} &f(x+2s, y+2t)+f(x-2s, y-t)+f(x-s, y-2t)+f(x, y+t)+f(x+s, y) \\ &= f(x-2s, y-2t)+f(x+2s, y+t)+f(x+s, y+2t)+f(x, y-t)+f(x-s, y) \quad \text{(M1)} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} &f(x+2s, y)+f(x, y+2t)+f(x-s, y)+f(x, y-t)+f(x-2s, y+t)+f(x+s, y-2t) \\ &= f(x-2s, y)+f(x, y-2t)+f(x+s, y)+f(x, y+t)+f(x+2s, y-t)+f(x-s, y+2t) \\ &\text{(M2)} \end{aligned}$$

สำหรับทุก $x, y, t, s \in G$

ข้อเสนอแนะในการวิจัย

เพื่อเป็นข้อมูลในการศึกษาและพัฒนางานวิจัยที่เกี่ยวข้องในอนาคตให้ได้ประโยชน์และมีแนวทางชัดเจนมากยิ่งขึ้น ผู้วิจัยจึงมีข้อเสนอแนะเพื่อเป็นพื้นฐานการวิจัยครั้งต่อไปดังนี้

1. ควรศึกษาความลักษณะเฉพาะ คุณสมบัติต่างๆ และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงฟังก์ชัน (M) เพื่อที่จะสามารถนำมาประยุกต์กับศาสตร์อื่นๆ ได้อย่างเป็นรูปธรรม เนื่องจากงานวิจัยทางสายคณิตศาสตร์บริสุทธิ์นั้นค่อนข้างจะเป็นนามธรรม

2. ผู้วิจัยอาจทำการวิจัยต่อไปได้อีก เพราะการเปลี่ยนตัวแปรในสมการเชิงฟังก์ชันในงานวิจัยที่ทำไปแล้ว ก็จะหาสมการเชิงฟังก์ชันที่สมนัยกับสมการเชิงฟังก์ชันที่เปลี่ยนตัวแปรเป็นอย่างอื่นได้อีก